Esperanza, Varianza, Momentos

Índice

Objetivos

- Objetivo: Estudiar algunas características numéricas asociadas a las variables aleatorias.

1 Introducción

Todos los seres humanos tenemos características numéricas que nos identifican y nos distinguen de otras personas. Por ejemplo: La edad, estatura, talla, peso, etc. Si pudiéramos considerar la totalidad de todos estos números para una persona en particular, la identificaríamos de manera única. Algo similar sucede con las variables aleatorias. En esta sección, estudiaremos algunas características numéricas asociadas a las variables aleatorias.

2 Esperanza

La esperanza de una variable aleatoria X es un número denotado por $E(X)$ y que se calcula como sigue:

Si X es discreta, entonces:

$$E(X) = \sum_{x} xP(X = x),$$

En donde la suma se efectúa sobre todos los posibles valores que pueda tomar la variable aleatoria, y se define cuando esta suma sea absolutamente convergente. El número de sumandos puede ser finito o infinito dependiendo del conjunto de valores de la variable aleatoria. Si X es continua con función de densidad $f(x)$, entonces la esperanza es:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx,$$

"Si la suma o integral anteriores no cumplen esta condición de convergencia absoluta, la esperanza no existe"

"Esperanza: número que indica el promedio ponderado de los diferentes valores que puede tomar la variable"

Suponiendo que esta integral es absolutamente convergente. Si la suma o integral anteriores no cumplen esta condición de convergencia absoluta, entonces se dice que la esperanza no existe. La esperanza de una
variable aleatoria es entonces un número que indica el promedio ponderado de los diferentes valores que puede tomar la variable. A la esperanza se le conoce también con los nombre de: media, valor esperado o valor promedio. En general, se usa la letra griega μ (mu) para denotarla.
La integral o suma arriba mencionada pueden no ser convergentes, y en ese caso, se dice que la variable aleatoria no tiene esperanza finita. La esperanza es uno de los

conceptos más importantes en probabilidad y tiene un amplio uso en las aplicaciones y otras ramas de la ciencia.

Ejemplo 1: Sea X una variable aleatoria discreta con función de densidad dada por la siguiente tabla.

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	1/3	1/8	1/4	1/8	1/5

Tabla 1: *Ejemplo 1*

La esperanza de X es el número:

$$\mathrm{E(X)} = \sum_x xf(x) = 0 \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{1}{8} + 2 \times \frac{1}{4} + 3 \times \frac{1}{8} + 4 \times \frac{1}{5} = 1.8$$

Observe que la suma su efectúa para todos los valores de x indicados en la tabla, es decir: 0, 1, 2, 3 y 4. También es instructivo observar que la esperanza no es necesariamente uno de los valores tomados por la variable aleatoria.

Ejemplo 2: Considere la variable aleatoria continua X con función de densidad $f(x) = 3x$, para $x \in (0,1)$, siendo cero fuera de este intervalo. La esperanza de X es

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_0^1 xf(x)dx = x3x\, dx = \frac{3}{4}x^3 \Big|_0^1 = \frac{3}{4}$$

Observe que la integral sólo es relevante en el intervalo $(0,1)$, pues fuera de dicho intervalo la función de densidad se anula.

Propiedades de la Esperanza:

- $E(c) = c$.
- $E(cX) = cE(X)$.
- Si $X \geq 0$, entonces $E(X) \geq 0$.
- $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$.

3 Varianza

Vamos ahora a definir otra característica numérica asociada a las $v.a$ llamada varianza. Se denota por $Var(X)$ y se define como sigue:

$$Var(X) = \begin{cases} \sum_x (x - E(X))^2 f(x) & Si\ X\ es\ discreta. \\ \int_{-\infty}^{\infty} \left(x - E(X)\right)^2 f(x) & Si\ X\ es\ continua. \end{cases}$$

"Varianza: mide el grado de dispersión de los diferentes valores tomados por la variable"

Observe que en una sola expresión, la varianza, se puede escribir como sigue $Var(X) = E[(X - E(X))^2]$.

La **varianza** es una **medida del grado de dispersión de los diferentes valores tomados por la variable**. Se le denota regularmente por la letra σ^2 (sigma cuadrada). A la raíz cuadrada positiva de la varianza, esto es σ, se le llama **desviación estándar**. Nuevamente la anterior suma o integral puede **no existir**, y en ese caso decimos que, la **variable aleatoria no tiene varianza finita**. Observemos que para calcular $Var(X)$ necesitamos conocer primero $E(X)$. Veamos algunos ejemplos sencillos".

Ejemplo 3: Calcularemos la varianza de la variable aleatoria discreta X con función de densidad dada por la siguiente tabla.

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	1/3	1/8	1/4	1/8	1/5

Tabla 1: Ejemplo 3

Recordemos primeramente que por cálculos previos $E(X) = 1.8$. Aplicando la definición de varianza tenemos que:

$$Var(X) = \sum_x (x - E(X))^2 f(x) = (0 - 1.8)^2 \times \frac{1}{3} + \cdots + (4 - 1.8)^2 \times \frac{1}{5} = 10.2$$

Ejemplo 4: Calcularemos la varianza de la variable aleatoria continua X con función de densidad $f(x) = 3x$, para $x \in (0,1)$. En un cálculo previo, habíamos encontrado que $E(X) = 3/4$.

Por lo tanto,

$$Var(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(x - E(X)\right)^2 f(x)dx$$

$$= \int_0^1 (x - 3/4)^2 3x\, dx \quad = \int_0^1 \left(3x^3 - \frac{9x^2}{2} + 27x/16\right)dx = \left(\frac{3x^4}{4} - \frac{3x^3}{2} + 27x^2/16\right)\Big|_0^1 = 0.093$$

Propiedades de la varianza:

- $Var(X) \geq 0$
- $Var(c) = 0$.
- $Var(cX) = c^2\, Var(X)$.
- $Var(X + c) = Var(X)$.
- $Var(X) = E(X^2) - E^2(X)$.
- En general, $Var(X + Y) \neq Var(X) + Var(Y)$.

4 Momentos

"Primer momento: Media
Segundo Momento: Varianza"

Finalmente definimos el $n-ésimo$ momento de una variable aleatoria X, cuando existe, como el número $E(X^n)$, para cualquier valor natural de n. El $n-ésimo$ momento central de X, cuando existe, es el número $E[(X-\mu)^n]$, en donde $\mu = E(X)$. Observe, que el primer momento de X es simplemente la media, y el segundo momento central es la varianza. Tenemos entonces que si X es una variable aleatoria con función de densidad o de probabilidad $f(x)$ entonces el $n-ésimo$ momento de X, si existe, se calcula como sigue:

$$E(X^n) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} x^n f(x) dx. \\ \sum_x x^n f(x). \end{cases}$$

El $n-ésimo$ momento central de X se calcula, para variables aleatorias continuas y discretas respectivamente, como indican las siguientes fórmulas:

$$E[(X-\mu)^n] = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^n f(x) dx. \\ \sum_x (x-\mu)^n f(x). \end{cases}$$

5 Resumen

- La esperanza número que indica el promedio ponderado de los diferentes valores que puede tomar la variable.
- La varianza mide el grado de dispersión de los diferentes valores tomados por la variable.

6 Referencias Bibliográficas

- Montgomery, D. C y Runger, R. (2008). Probabilidad y Estadística Aplicadas a la Ingeniería. 2da. Edición. Limusa Wiley. Mexico.
- Rincón. L. (2010). Curso Elemental de Probabilidad y Estadística. 1ra Edición. Circuito Exterior de CU. México D.F.
- Walpole, R. E., Myers, R. H., Myers,S. L. y Ye, K. (2007). Probabilidad y Estadística para Ingeniería y Ciencias. 8va. Edición. Pearson. Mexico
- I. Espejo Miranda, F. Fernández Palacín, M. A. López Sánchez, M. Muñoz Márquez, A. M. Rodríguez Chía, A. Sánchez Navas, C. Valero Franco. (2006).

Estadística Descriptiva y Probabilidad. 3ra. Edición. Servicio de Publicaciones de la Universidad de Cádiz.

- Devore, J. (2008). Probabilidad y Estadística para Ingeniería y Ciencias. 7ma. Edición. Cengace Learning Editores. México
- Canavos, G. Probabilidad y Estadística. Métodos y Aplicaciones.
- Daniel, W. (2009). Bioestadística. Base para el análisis de las ciencias de la salud. Cuarta edición. Limusa Wiley. México.
- Mendenhall, W., Wackerly, D. y Scheaffer, R. (1994). Estadística Matemática con Aplicaciones. Grupo Editorial Iberoamericana. México.