Distribuciones Continuas

Índice

Objetivos

- Objetivo 1: Conocer los distintos tipos de distribuciones de tipo continuo.
- Objetivo 2: Comprender y analizar las diferentes distribuciones de variables continuas

1 Introducción

Ahora estudiaremos algunas distribuciones de probabilidad de variables aleatorias continuas. No construiremos estas distribuciones a partir de experimentos aleatorios particulares como en el caso de las distribuciones discretas, más bien, las definiremos sin mayor justificación, en algunos casos, mostraremos la forma de obtener estas distribuciones a partir de considerar ciertas funciones de variables aleatorias conocidas.

2 Distribución Uniforme Continua

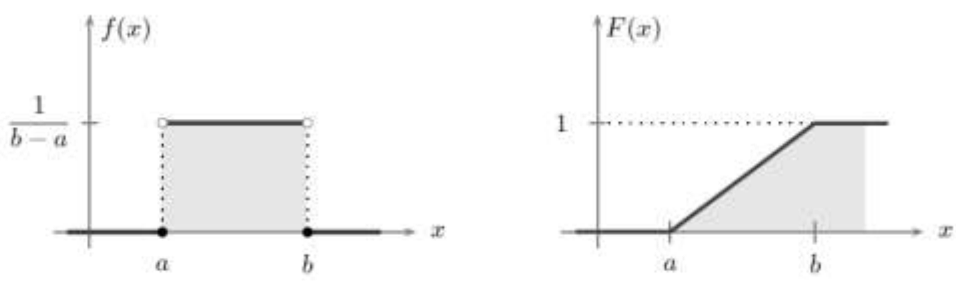
Decimos que una variable aleatoria X tiene una distribución uniforme continua en el intervalo (a, b), y escribimos $X \sim unif(a, b)$, cuando su función de densidad es:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & Si\ x \in (a, b), \\ 0 & Cualquier\ otro\ caso. \end{cases}$$

"Distribución Uniforme Continua: la función de densidad es no negativa e integra uno"

Las gráficas generales de esta función se muestran en la siguiente Figura, y es evidente que se trata de una función de densidad pues es no negativa e integra uno. En este caso, es muy fácil encontrar la correspondiente función de distribución. Los parámetros de esta distribución son los números $a < b$. Es fácil verificar que $E(X) = (a + b)/2$, que corresponde al punto medio del intervalo (a, b). Además, $Var(X) = (b - a)^2/12$ de modo que la varianza o dispersión crece cuando a y b se alejan uno del otro, y por el contrario, cuando los parámetros están muy cercanos, la varianza es pequeña. Esta distribución es una de las más sencillas, y se usa naturalmente para cuando no se conoce mayor información de la variable aleatoria de interés, excepto que toma valores continuos dentro de algún intervalo.

Figura 1: *Distribución Uniforme Continua*



3 Distribución Exponencial

Decimos que una variable aleatoria continua X tiene una distribución exponencial con parámetro $\lambda > 0$, y escribimos $X \sim exp(\lambda)$, cuando su función de densidad es:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & Si\ x > 0, \\ 0 & Si\ x \leq 0. \end{cases}$$

"Método de integración por partes: se ha usado para modelar tiempos de espera para la ocurrencia de un cierto evento"

La gráfica de esta función cuando el parámetro λ toma el valor particular 3, es la que se muestra en la siguiente Figura. La correspondiente función de distribución aparece a su derecha. Es muy sencillo verificar que la función $f(x)$ arriba definida es efectivamente una función de densidad para cualquier valor del parámetro $\lambda > 0$. Aplicando el método de integración por partes puede también comprobarse que $E(X) = 1/\lambda$, y $Var(X) = 1/\lambda^2$. Esta distribución se ha usado para modelar tiempos de espera para la ocurrencia de un cierto evento.

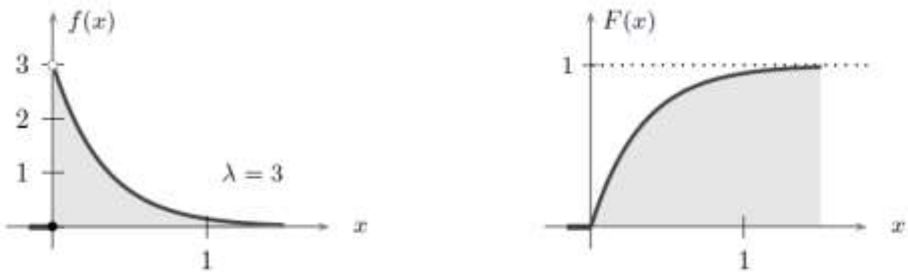


Figura 2: Distribución Exponencial"[1].

Ejemplo 1: Suponga que el tiempo en minutos que un usuario cualquiera permanece revisando su correo electrónico sigue una distribución *exponencial* de parámetro $\lambda = 1/5$. Calcule la probabilidad de que un usuario cualquiera permanezca conectado al servidor de correo:

a) Menos de un minuto

b) Más de una hora

a) $P(X < 1) = \int_0^1 \frac{1}{5e^{-\frac{x}{5}}dx} = 0.181$

b) $P(X > 60) = \int_{60}^{\infty} 1/5e^{-x/5}\, dx = 0.0000061$

4 Distribución Normal

"Distribución normal = más importante!!"

Esta es posiblemente la distribución de probabilidad de mayor importancia. Decimos que la variable aleatoria continua X tiene una distribución normal, si su función de densidad está dada por la siguiente expresión:

1 Tomado de (Rincón, 2010).p.60-61

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$$

En donde $\mu \in \mathbb{R}$ y $\sigma > 0$ son dos parámetros. Escribimos entonces $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. La gráfica de esta función de densidad tiene forma de campana como se puede apreciar en la Figura mostrada a continuación, en donde se muestra además el significado geométrico de los dos parámetros.

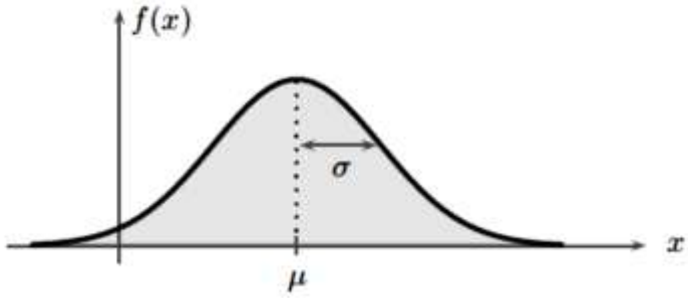


Figura 3: Distribución Normal *Tomada de (Rincón, 2010).p. 65*

"Distribución normal estándar si $\mu = 0$ y $\sigma^2 = 1$."

No es inmediato pero es posible demostrar que $E(X) = \mu$, y ello significa que la campana está centrada en este valor, el cual puede ser negativo, positivo o cero. También puede demostrarse que $Var(X) = \sigma^2$, y que la distancia del punto μ a cualquiera de los dos puntos en donde la función tiene puntos de inflexión es σ, por lo tanto, la campana se abre o se cierra de acuerdo a la magnitud de este parámetro. En particular, decimos que la variable aleatoria X tiene una distribución normal estándar si tiene una distribución normal con parámetros $\mu = 0$ y $\sigma^2 = 1$. En este caso la función de densidad se reduce a la expresión:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

Es posible transformar una variable aleatoria normal no estándar en una estándar.

5 Estandarización

Sea X una variable aleatoria con distribución normal con parámetros μ y σ^2. Entonces la siguiente variable aleatoria tiene una distribución normal estándar:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

"Cuando la variable aleatoria se ha transformado mediante el proceso de estandarización, se dice que la variable ha sido estandarizada "

A la operación anterior se le conoce con el nombre de estandarización, y bajo tal transformación se dice que la variable X ha sido estandarizada. Es común usar la letra Z para denotar una variable aleatoria con distribución normal estándar, y seguiremos nosotros también esa costumbre.

Es también común denotar la función de distribución de Z como $\Phi(x)$, es decir,

$$\Phi(x) = P(Z \leq x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2} du,$$

Cuyo significado geométrico se muestra en la Figura mostrada a continuación. Es necesario decir que, sin importar el método de integración que se utilice, no es posible encontrar una expresión exacta para esta integral, pero usando métodos numéricos pueden encontrarse aproximaciones de ella para distintos valores de x. Generalmente, es de utilidad la construcción de una tabla con estos valores aproximados. Cada renglón de esta tabla corresponde a un valor de x hasta el primer dígito decimal, las distintas columnas corresponden al segundo dígito decimal. El valor que aparece en la tabla es.

Por ejemplo: El renglón marcado con 1.4 y la columna marcada con 0.05 corresponden al valor 1.45, tenemos entonces que $\Phi(x) = 0.9265$. (Rincón, 2010)

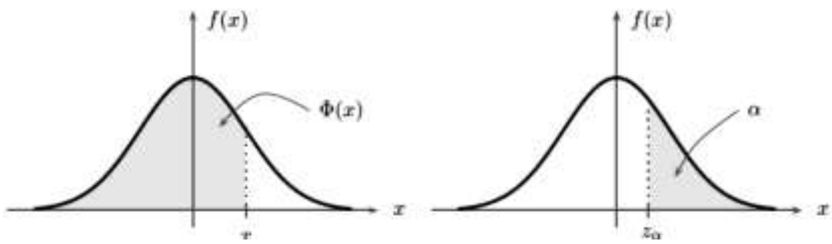


Figura 4: *Probabilidad Acumulada de la Normal*

Ejemplo 2: La medida de la altura X de un cirto grupo de estudiantes de un colegio de la ciudad, sigue una distribución normal de media $\mu = 1.70\ m$ y desviación estandar $\sigma = 0.10\ m$. Calcular la probabilidad de que un estudiante seleccionado al azar mida más de 1.80.

Dado que Y sigue una distribución $N(1.70, 0.10)$. Estandarizando esta variable se obtiene una nueva variable $Z = \frac{Y-1.70}{0.10}$ de tipo $N(0,1)$. Entonces:

$$P(X > 1.80) = P\left(\frac{X - 1.70}{0.10} > \frac{1.80 - 1.70}{0.10}\right) = P(Z > 1) = 0.1587$$

6 Distribuciones Derivadas de la Normal

(Espejo Miranda, Fernández Palacín, López Sánchez, Muñoz Márquez, Rodríguez Chía, & Valero Franco, 2006) Las definen así:

6.1 Distribución Chi - Cuadrada

Decimos que la variable aleatoria continua X tiene una distribución *chi-cuadrada* con *n* grados de libertad (*n* entero positivo), si su función de densidad está dada por la siguiente expresión:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(n/2)} \left(\frac{1}{2}\right)^{n/2} x^{n/2} e^{-x/2} & Si\ x > 0. \\ 0 & Si\ x \leq 0. \end{cases}$$

"Único parámetro llamado grados de libertad "

Se trata de una variable aleatoria continua con posibles valores en el intervalo $(0,\infty)$. Esta distribución tiene un solo parámetro denotado aquí por la letra n, y al cual se le llama grados de libertad. A pesar de su aparente expresión complicada, no es difícil comprobar que $f(x)$ es efectivamente una función de densidad. La gráfica de esta función para varios valores del parámetro n aparece en la Figura mostrada a continuación. Escribiremos simplemente $X \sim \chi^2(n)$, en donde la letra griega χ se pronuncia "ji" o también "chi". Puede demostrarse que $E(X) = n$ y $Var(X) = 2n$.

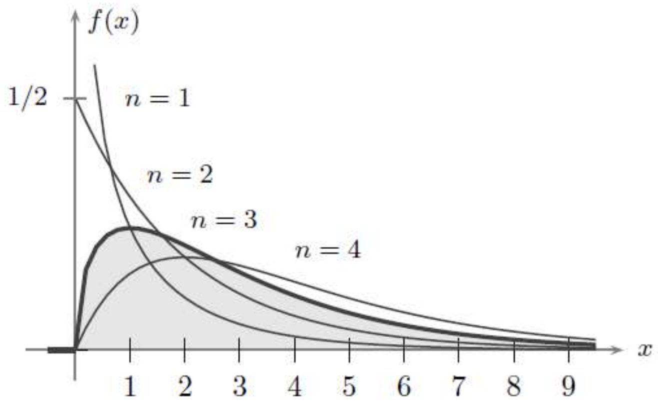


Figura 5: *Distribución Chi-Cuadrado.Tomada de (Miranda, y otros, 3ra. Edición 2006)*

6.2 Distribución t de Student

Decimos que la variable aleatoria continua X tiene una distribución *t-Student* con n grados de libertad que se denota por t_n. Si su función de densidad está dada por la siguiente expresión:

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}(n/2)}(1+x^2/n)^{-n+1/2}, -\infty < x < \infty$$

Es fácil demostrar que $E[X] = 0$ y $V[X] = \frac{n}{n-2}$, para $n > 2$.

6.3 Distribución F de Snedecor

Decimos que la variable aleatoria continua X tiene una F de Snedecor con n y m grados de libertad que se denota por $F_{n,m}$. Si su función de densidad está dada por la siguiente expresión:

$$f(x) = \frac{m^{m/2}n^{n/2}\Gamma\left(\frac{n+m}{2}\right)}{\Gamma(m/2)\Gamma(n/2)}x^{\frac{m}{2}-1}(n+mx)^{-m+n/2}, \qquad x \geq 0.$$

Es fácil demostrar que $E(X) = \frac{n}{n-2}$ con $n > 2$, y $V(X) = \frac{n^2(2m+2n-4)}{m(n-2)^2(n-4)}$ con $n > 4$. (p. 209-210)

7 Resumen

- Distribución Uniforme Continua: la función de densidad es no negativa e integra uno.
- La distribución normal es la distribución de probabilidad de mayor importancia.
- Cuando una variable aleatoria se ha transformado mediante el proceso de estandarización, se dice que la variable ha sido estandarizada.
- Dentro de la distribución chi – cuadrada sólo existe un parámetro llamado grados de libertad.

8 Referencias Bibliográficas

- Montgomery, D. C y Runger, R. (2008). *Probabilidad y Estadística Aplicadas a la Ingeniería.* 2da. Edición. Limusa Wiley. Mexico.
- Rincón. L. (2010). *Curso Elemental de Probabilidad y Estadística.* 1ra Edición. Circuito Exterior de CU. México D.F.
- Walpole, R. E., Myers, R. H., Myers,S. L. y Ye, K. (2007). *Probabilidad y Estadística para Ingeniería y Ciencias.* 8va. Edición. Pearson. Mexico
- I. Espejo Miranda, F. Fernández Palacín, M. A. López Sánchez, M. Muñoz Márquez, A. M. Rodríguez Chía, A. Sánchez Navas, C. Valero Franco. (2006*). Estadística Descriptiva y Probabilidad.* 3ra. Edición. Servicio de Publicaciones de la Universidad de Cádiz.
- Devore, J. (2008). *Probabilidad y Estadística para Ingeniería y Ciencias.* 7ma. Edición. Cengace Learning Editores. México
- Canavos, G. *Probabilidad y Estadística. Métodos y Aplicaciones.*
- Daniel, W. (2009*). Bioestadística. Base para el análisis de las ciencias de la salud.* Cuarta edición. Limusa Wiley. México.
- Mendenhall, W., Wackerly, D. y Scheaffer, R. (1994). *Estadística Matemática con Aplicaciones.* Grupo Editorial Iberoamericana. México.